ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ QUANG THÌN

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LẶP SONG SONG CHO MỘT HỌ HỮU HẠN DÃY ÁNH XẠ GẦN KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ QUANG THÌN

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LẶP SONG SONG CHO MỘT HỌ HỮU HẠN DÃY ÁNH XẠ GẦN KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Trương Minh Tuyên

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cảm ơn

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS.Trương Minh Tuyên, người đã tận tình hướng dẫn hết lòng, giúp tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu để hoàn thành luận văn này.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn phòng Đào tạo, các thầy, cô giáo trong khoa Toán–Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã nhiệt tình giảng dạy và giúp đỡ tác giả trong quá trình thực hiện luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn lãnh đạo và các đồng nghiệp của Phòng Giáo dục và Đào tạo huyện Tiền Hải, tỉnh Thái Bình. Nhân dịp này, tác giả xin gửi lời chân thành cảm ơn tới gia đình, bạn bè đã động viên, tạo điều kiện giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Mục lục

Một số ký hiệu và viết tắt **v**

Mở đầu **1**

Chương 1 Một số kiến thức chuẩn bị **3**

1.1. Một số đặc trưng của không gian Hilbert 3

1.2. Ánh xạ không giãn và toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert 8

1.2.1. Ánh xạ không giãn 8

1.2.2. Nửa nhóm ánh xạ không giãn 10

1.2.3. Toán tử đơn điệu 12

1.3. Phương pháp lai chiếu và phương pháp chiếu co hẹp tìm điểm bất động chung của một họ ánh xạ không giãn 15

1.3.1. Phương pháp lai chiếu 15

1.3.2. Phương pháp chiếu co hẹp 16

1.4. Một số bổ đề bổ trợ 17

Chương 2 Phương pháp lai chiếu và phương pháp chiếu co hẹp tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn dãy ánh xạ gần không giãn **19**

2.1. Dãy ánh xạ gần không giãn 19

2.2. Phương pháp lai chiếu 20

2.3. Phương pháp chiếu co hẹp 25

2.4. Một số ứng dụng 29

2.4.1. Tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn 29

2.4.2. Tìm điểm bất động của nửa nhóm ánh xạ không giãn . . 32

2.4.3. Tìm không điểm của toán tử đơn điệu 32

2.4.4. Hệ bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát 33

2.4.5. Hệ bất đẳng thức biến phân 38

2.5. Một số ví dụ minh họa 39

Kết luận **42**

Một số ký hiệu và viết tắt

H	không gian Hilbert
$\langle .,. \rangle$	tích vô hướng trên H
$\|.\|$	chuẩn trên H
$\cup$	phép hợp
$\cap$	phép giao
$\mathbb{R}_+$	tập các số thực không âm
$G(A)$	đồ thị của toán tử A
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền ảnh của toán tử A
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$\mathrm{diam}(C)$	đường kính của tập C
$\mathrm{conv}(C)$	bao lồi của tập C
$\arg\max\limits_{x \in C} f(x)$	tập các điểm cực đại của phiếm hàm $f(x)$
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
$F(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T

Mở đầu

Bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn hay vô hạn ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert hay không gian Banach là một trường hợp riêng của bài toán chấp nhận lồi: "Tìm một phần tử thuộc giao khác rỗng của một họ hữu hạn hay vô hạn các tập con lồi và đóng $\{C_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ của không gian Hilbert H hay không gian Banach E", với $\mathcal{I}$ là tập chỉ số bất kỳ. Bài toán này có nhiều ứng dụng quan trọng trong các lĩnh vực khoa học khác nhau như: Xử lí ảnh, khôi phục tín hiệu, Vật lý, Y học ... Khi $C_i = F(T_i)$, với $F(T_i)$ là tập điểm bất động của ánh xạ không giãn $T_i,\ i = 1, 2, ..., N$, thì đã có nhiều phương pháp được đề xuất dựa trên các phương pháp lặp cổ điển nổi tiếng. Đó là các phương pháp lặp Kranoselskii, Mann, Ishikawa, Halpern, phương pháp xấp xỉ mềm hay các phương pháp sử dụng các siêu phẳng cắt...

Gần đây, một số tác giả đã nghiên cứu bài toán tìm điểm bất động của các ánh xạ không giãn khi thông tin đầu vào chỉ được biết ở dạng gần đúng (các thông tin đầu vào được cho bởi nhiễu). Trong đó, bài toán tìm điểm bất động (chung) của các dãy ánh xạ gần không giãn là một chủ đề lý thú và thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều người làm toán trong và ngoài nước.

Năm 2018, các tác giả Tuyen T.M. và Ha N.S. đã đưa ra một số phương pháp lai ghép bao gồm phương pháp chiếu lai ghép và phương pháp chiếu co hẹp kết hợp với phương pháp lặp Mann [12] cho bài toán tìm một điểm bất động chung của một họ hữu hạn dãy ánh xạ gần không giãn trong không gian Hilbert. Hơn nữa, họ đã đưa ra một số ứng dụng của các phương pháp lặp cho việc giải các bài toán liên quan khác, như bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn, bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát, bài toán tìm không điểm của toán tử đơn điệu.

Mục đích của luận văn này là trình bày lại một cách có hệ thống các kết quả của các tác giả Tuyen T.M. và Ha N.S. trong tài liệu [12]. Ngoài ra, luận văn cũng đề cập đến hai ví dụ số đơn giản được lập trình và thử nghiệm bằng phần mềm MATLAB nhằm minh họa thêm cho các phương pháp lặp. Nội dung chính của luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này luận văn tập trung trình bày và làm rõ một số đặc trưng cơ bản của không gian Hilbert thực, ánh xạ không giãn, nửa nhóm ánh xạ không

giãn và toán tử đơn điệu. Các phương pháp chiếu lai ghép và chiếu co hẹp cho bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn.

Chương 2. Một số phương pháp lai ghép tìm điểm bất động chung của một họ ánh xạ không giãn

Nội dung chính của chương này là trình bày lại các kết quả của các tác giả Tuyen T.M. và Ha N.S. bao gồm phương pháp chiếu lai ghép và phương pháp chiếu co hẹp kết hợp với phương pháp lặp Mann [12] cho bài toán tìm một điểm bất động chung của một họ hữu hạn dãy ánh xạ gần không giãn trong không gian Hilbert cùng với các ứng dụng của chúng.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này bao gồm bốn mục chính. Mục 1.1 đề cập đến một số đặc trưng cơ bản của không gian Hilbert thực, Mục 1.2 giới thiệu sơ lược một số kết quả về ánh xạ không giãn, nửa nhóm ánh xạ không giãn và toán tử đơn điệu. Mục 1.3 trình bày về phương pháp lai chiếu và phương pháp chiếu co hẹp cho bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn. Mục 1.4 giới thiệu một số bổ đề bổ trợ cần sử dụng trong việc trình bày nội dung của Chương 2. Nội dung của chương này phần lớn được tham khảo từ các tài liệu [1, 2, 5, 8].

1.1. Một số đặc trưng của không gian Hilbert

Ta luôn giả thiết H là không gian Hilbert thực với tích vô hướng được kí hiệu là $\langle .,. \rangle$ và chuẩn được kí hiệu là $\|.\|$.

Trước hết, ta nhắc lại một đặc trưng hình học quan trọng của không gian Hilbert.

Mệnh đề 1.1. *Trong không gian Hilbert thực H ta luôn có đẳng thức sau*

$$\|x-y\|^2 + \|x-z\|^2 = \|y-z\|^2 + 2\langle x-y, x-z\rangle,$$

với mọi $x, y, z \in H$.

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
\|y-z\|^2 + 2\langle x-y, x-z\rangle &= \langle y,y\rangle + \langle z,z\rangle + 2\langle x,x\rangle - 2\langle x,z\rangle - 2\langle x,y\rangle \\
&= [\langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle] \\
&\quad + [\langle x,x\rangle - 2\langle x,z\rangle + \langle z,z\rangle] \\
&= \|x-y\|^2 + \|x-z\|^2.
\end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 1.2. *Cho H là một không gian Hilbert thực. Khi đó, với mọi $x, y \in H$ và mọi $\lambda \in [0,1]$, ta có*

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 &= \lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda(1-\lambda)\langle x, y\rangle + (1-\lambda)^2\|y\|^2\\ &= \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)(\|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2)\\ &= \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.\end{aligned}$$

Ta được điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 1.3. *Cho H là một không gian Hilbert thực. Khi đó, nếu với $x, y \in H$ thỏa mãn điều kiện*

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\|.\|y\|,$$

tức là bất đẳng thức Schwars xảy ra dấu bằng thì hai véc tơ x và y là phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng $x \neq \lambda y$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$. Khi đó, từ tính chất của tích vô hướng, ta có

$$0 < \|x - \lambda y\|^2 = \lambda^2\|y\|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + \|x\|^2,$$

với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$. Ta thấy rằng nếu $y = 0$, thì hiển nhiên x và y là phụ thuộc tuyến tính. Giả sử $y \neq 0$, khi đó với $\lambda = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$, thì bất đẳng thức trên trở thành

$$|\langle x, y\rangle| < \|x\|.\|y\|,$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy x và y là phụ thuộc tuyến tính.
Mệnh đề được chứng minh. □

Nhắc lại rằng, dãy $\{x_n\}$ trong không gian Hilbert H được gọi là hội tụ yếu về phần tử $x \in H$, nếu

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle,$$

với mọi $y \in H$. Từ tính liên tục của tích vô hướng, suy ra nếu $x_n \to x$, thì $x_n \rightharpoonup x$. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng. Chẳng hạn xét không gian $l^2 = \{\{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty\}$ và $\{e_n\} \subset l^2$, được cho bởi

$$e_n = (0, ..., 0, \underset{\text{vị trí thứ n}}{1}, 0, ..., 0, ...),$$

với mọi $n \geq 1$. Khi đó, $e_n \rightharpoonup 0$, khi $n \to \infty$. Thật vậy, với mỗi $y \in H$, từ bất đẳng thức Bessel, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, y\rangle|^2 < \|y\|^2 < \infty.$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty}\langle e_n, y\rangle = 0$, tức là $e_n \rightharpoonup 0$. Tuy nhiên, $\{e_n\}$ không hội tụ về 0, vì $\|e_n\| = 1$ với mọi $n \geq 1$.

Ta biết rằng mọi không gian Hilbert H đều thỏa mãn điều kiện của Opial, tính chất này được thể hiện trong mệnh đề dưới đây:

Mệnh đề 1.4. *Cho H là một không gian Hilbert thực và $\{x_n\} \subset H$ là một dãy bất kỳ thỏa mãn điều kiện $x_n \rightharpoonup x$, khi $n \to \infty$. Khi đó, với mọi $y \in H$ và $y \neq x$, ta có*

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|. \tag{1.2}$$

Chứng minh. Vì $x_n \rightharpoonup x$, nên $\{x_n\}$ bị chặn.

Ta có

$$\begin{aligned}\|x_n - y\|^2 &= \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle \\ &> \|x_n - x\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle.\end{aligned}$$

Vì $x \neq y$, nên

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|^2 &> \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle \\ &= \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2.\end{aligned}$$

Do đó, ta nhận được

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|.$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Mệnh đề 1.5. *Mọi không gian Hilbert thực H đều có tính chất Kadec-Klee, tức là nếu $\{x_n\} \subset H$ là một dãy bất kỳ trong H thỏa mãn các điều kiện $x_n \rightharpoonup x$ và $\|x_n\| \to \|x\|$, thì $x_n \to x$, khi $n \to \infty$.*

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\|x_n - x\|^2 &= \|x_n\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle + \|x\|^2 \\ &\to 0,\ n \to \infty.\end{aligned}$$

Suy ra $x_n \to x$, khi $n \to \infty$. Mệnh đề được chứng minh. □